

Научная статья
УДК 631.3.001.2 ; 631.333
DOI 10.66783/2782-3172.2026.38.85.011

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УДОБРЕНИЙ С УЧЁТОМ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ АГРЕГАТА И ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ РАБОЧИХ ОРГАНОВ

Олег Олегович Сидоров (ORCID: 0009-0003-9829-4368), Губейдулла Сибятуллович Юнусов
(ORCID: 0000-0003-2127-6439)

Марийский государственный университет, Йошкар-Ола, Россия

Автор, ответственный за переписку: Олег Олегович Сидоров, oleg.sidorov23@yandex.ru

Аннотация

В работе представлены результаты математического моделирования процесса внесения минеральных удобрений с использованием малогабаритной сельскохозяйственной техники. Исследовано влияние скорости движения агрегата и частоты вращения центробежного распределительного диска на кинематические параметры частиц удобрений, дозу внесения и равномерность распределения. На основе дифференциальных уравнений относительного движения частицы по лопатке вращающегося диска получены аналитические зависимости координаты и скорости от времени. Установлены функциональные связи между дозой внесения, частотой вращения и скоростью движения, позволяющие корректировать режимы работы в реальном времени. Определены оптимальные диапазоны параметров, обеспечивающие минимальный коэффициент вариации распределения ($\leq 15\%$). Результаты моделирования верифицированы экспериментальными данными и могут быть использованы при разработке адаптивных систем управления технологическими процессами точного земледелия.

Ключевые слова: математическое моделирование, внесение удобрений, центробежный диск, равномерность распределения, скорость движения, частота вращения, кинематика частицы, малогабаритная техника

Финансирование: исследование, на основе результатов которого написана данная статья, финансировалось за счет средств авторов

Для цитирования: Сидоров О. О., Юнусов Г. С. Математическое моделирование процесса распределения удобрений с учётом скорости движения агрегата и частоты вращения рабочих органов // Вестник Вятского ГАТУ. 2026. № 3. С. 106–113. DOI: 10.66783/2782-3172.2026.38.85.011.

MATHEMATICAL MODELING OF THE FERTILIZER DISTRIBUTION PROCESS, TAKING INTO ACCOUNT THE MOVEMENT SPEED OF THE UNIT AND THE ROTATION FREQUENCY OF THE WORKING PARTS

Oleg O. Sidorov (ORCID: 0009-0003-9829-4368), Gubeidulla S. Yunusov (ORCID: 0000-0003-2127-6439)
Mari State University, Yoshkar-Ola, Russia

Corresponding author: Oleg O. Sidorov, oleg.sidorov23@yandex.ru

Abstract

The paper presents the results of mathematical modeling of the process of applying mineral fertilizers using small-sized agricultural machinery. The influence of the unit's movement speed and the rotation frequency of the centrifugal distribution disc on the kinematic parameters of fertilizer particles, the application rate, and the uniformity of distribution has been studied. Based on the differential equations of the relative motion of a particle along the blade of a rotating disc, analytical dependencies of the coordinate and velocity on time have been obtained. Functional relationships between the application rate, rotation frequency, and movement speed have been established, making it possible to adjust operating modes in real time. The optimal ranges of parameters have been determined, ensuring a minimum coefficient of variation of the distribution ($\leq 15\%$). The simulation results have been verified with experimental data and can be used in the development of adaptive control systems for technological processes in precision agriculture.

Keywords: mathematical modeling, fertilization, centrifugal disk, uniform distribution, movement speed, rotation frequency, particle kinematics, small-sized equipment

Funding: the study on which this article is based was funded by the authors' own funds

For citation: Sidorov OO, Yunusov GS. Mathematical modeling of the fertilizer distribution process, taking into account the movement speed of the unit and the rotation frequency of the working parts. Vestnik Vyatskogo GATU. 2026;(3):106–113. DOI: 10.66783/2782-3172.2026.38.85.011. (In Russ.).

Введение. Эффективность применения минеральных удобрений в значительной степени определяется качеством их распределения по поверхности или в объёме почвы. Одним из ключевых факторов, влияющих на этот процесс, является соответствие режимов работы распределительного оборудования конкретным условиям эксплуатации [1, 2]. Для малогабаритной техники, которая часто используется на сложных рельефах и небольших делянках, эта проблема стоит особенно остро, так как изменение скорости движения агрегата напрямую влияет на центробежные силы, действующие на частицы, и, следовательно, на ширину захвата и плотность внесения.

Существующие подходы к настройке разбрасывателей часто основаны на эмпирических таблицах, что не позволяет оперативно реагировать на изменение скорости в процессе работы [3]. Поэтому разработка математической модели, связывающей кинематические параметры частиц с режимными характеристиками агрегата, является актуальной научно-технической задачей.

Цель настоящей работы – создание аналитической модели процесса распределения удобрений, позволяющей на основе скорости движения агрегата и частоты вращения рабочего органа прогнозировать дозу внесения и равномерность распределения, а также определять оптимальные режимы работы.

Материалы и методы. Для описания движения гранулы минерального удобрения по радиальной лопатке центробежного диска рассмотрим систему координат, вращающуюся вместе с диском с постоянной угловой скоростью ω . Ось x направлена радиально вдоль лопатки (рисунок 1) [4].

На частицу массой m в относительном движении действуют следующие силы:

- центробежная сила инерции: $\Phi_e = m\omega^2 x$;
- кориолисова сила инерции: $\Phi_c = 2m\omega \dot{x}$;
- сила трения о лопатку: $F_L = N_L f = 2m\omega \dot{x} f$;
- сила трения о диск: $F_D = N_D f = 2mg \dot{f}$.

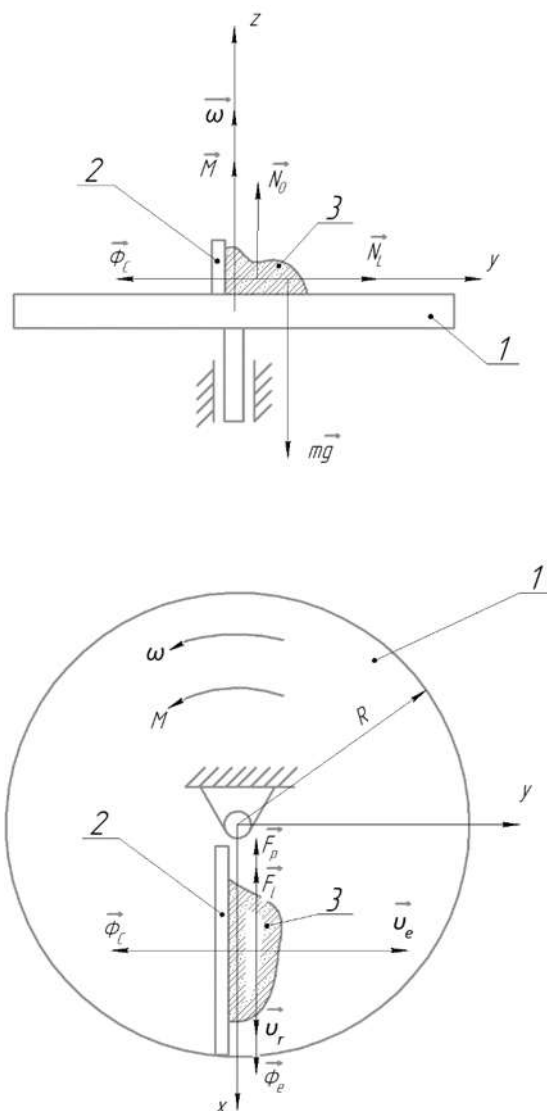


Рисунок 1. Относительное движение частицы по лопатке вращающегося диска:
1 – диск; 2 – лопатка; 3 – частица

Дифференциальное уравнение относительного движения частицы вдоль лопатки получается из второго закона Ньютона и имеет вид [3, 5]

$$\ddot{x} + 2\omega f \dot{x} - \omega^2 x = -gf, \quad (1)$$

где $\ddot{x}$ – относительное ускорение, м/с²;
 $\dot{x}$ – относительная скорость частицы, м/с;
 x – текущая радиальная координата, м;
 ω – угловая скорость диска, рад/с;
 f – коэффициент трения частицы о материал лопатки;
 g – ускорение свободного падения, м/с².

Решение уравнения (1) при начальных условиях $x(0) = x_0$ (частица поступает на диск на расстоянии x_0 от центра) и $\dot{x}(0) = 0$ (начальная относительная скорость равна нулю) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного $x(t)$:

$$x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + \frac{gf}{\omega^2}, \quad (2)$$

где $k_1 = -\omega f + \omega \sqrt{1 + f^2}$ и $k_2 = -\omega f - \omega \sqrt{1 + f^2}$ – корни характеристического уравнения, а постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий.

Полученное решение (2) использовалось в дальнейшем для расчёта кинематических параметров частицы на сходе с диска. Для оценки равномерности распределения и дозы внесения применялись экспериментально-статистические зависимости, описанные в разделе «Результаты и обсуждение».

Результаты и обсуждение. Анализ уравнения (2) показывает, что частица движется с ускорением к периферии диска. Скорость $\dot{x}(t)$ и координата $x(t)$ монотонно возрастают со временем. Относительная скорость на сходе с диска (при $x = R$, где R – радиус диска) определяет начальные условия для баллистического полета частицы, а значит, и ширину захвата агрегата. На рисунке 2 представлены графики зависимостей координаты $x(t)$ и относительной скорости $\dot{x}(t)$, построенные для характерных значений $\omega = 62,8$ рад/с и $f = 0,5$.

Из графиков видно, что разгон частицы происходит интенсивно в первые 0,1–0,15 с после поступления на диск, что необходимо учитывать при проектировании направляющих кожухов для минимизации потерь удобрений.

Доза внесения сухих удобрений Q (кг/га) является интегральным показателем, зависящим от количества материала, подаваемого на диск, и площади, на которую он распределяется. Количество материала, сходящего с диска в единицу времени, определяется производительностью дозирующего устройства G (кг/с). Однако, если дозирующее устройство (заслонка) настроено на фиксированную подачу, то фактическая доза на единицу площади будет определяться скоростью движения агрегата v (км/ч) и эффективной шириной захвата B (м), которая, в свою очередь, зависит от частоты вращения диска.

На основе экспериментальных данных и теоретических предпосылок установлено, что доза внесения обратно пропорциональна скорости движения агрегата и прямо пропорциональна частоте вращения диска [6]:

$$Q = k \cdot \frac{n}{v}, \quad (3)$$

где $n = \frac{30\omega}{v}$ – частота вращения диска, об/мин;

k – комплексный коэффициент, учитывающий конструктивные параметры (площадь выгрузного окна, угол наклона лопаток, тип удобрений).

Физический смысл зависимости (3) заключается в том, что при увеличении скорости движения агрегата один и тот же объём удобрений распределяется по большей площади, что приводит к снижению дозы. Для компенсации этого эффекта необходимо увеличивать частоту вращения диска (и, соответственно, подачу материала). Из уравнения (3) легко получить условие для поддержания постоянной дозы $Q_{\text{зад}}$:

$$n_{\text{необх}} = \frac{Q_{\text{зад}}}{k} \cdot v. \quad (4)$$

Выражение (4) представляет собой закон управления для системы автоматического регулирования нормы внесения: при изменении скорости движения частота вращения должна изменяться пропорционально.

Помимо дозы, скорость движения существенно влияет на качество распределения, оцениваемое коэффициентом вариации C_v (%). Экспериментально установлено, что с ростом скорости возрастает неравномерность, что связано с уменьшением времени взаимодействия частиц с диском и увеличением влияния воздушных потоков.

Для учёта этого влияния предложена корректирующая формула

$$C_v(v) = C_{v0} \cdot K_v, \quad (5)$$

где C_{v0} – коэффициент вариации при эталонной скорости (например, 4 км/ч);

K_v – поправочный коэффициент, который в диапазоне скоростей 2–6 км/ч может быть аппроксимирован линейной зависимостью $K_v = 1 + 0,05(v - 4)$.

Полученные данные вносим математическую модель (рисунок 2)

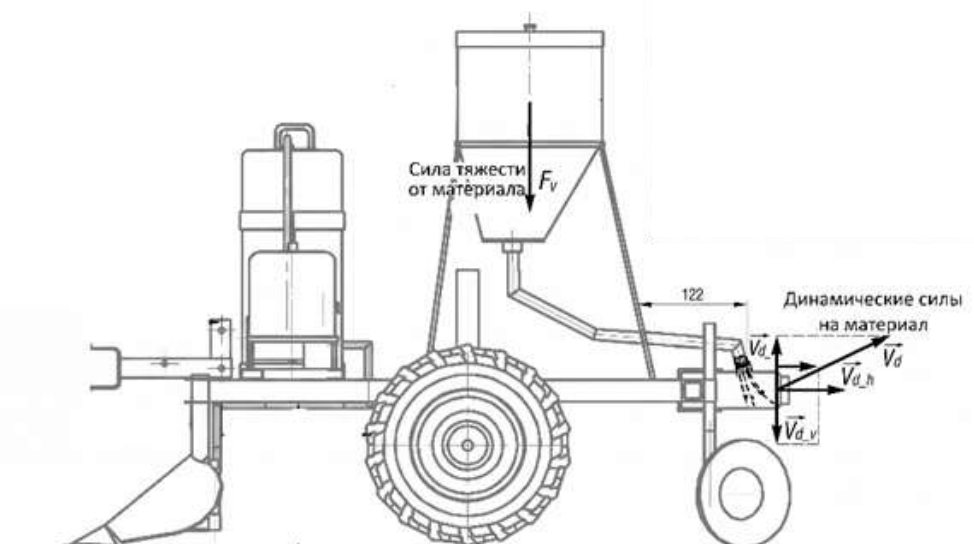


Рисунок 2. Математическая модель зависимости равномерности распределения сухих минеральных удобрений от скорости движения

Расчётные и экспериментальные значения коэффициента вариации для разных скоростей приведены в таблице 1.

Таблица 1. Зависимость равномерности распределения от скорости движения

Скорость движения v , км/ч	Коэффициент вариации C_v , % (расчёт)	Коэффициент вариации C_v , % (эксперимент)
2	12,5	12–14
4	15,0	15–16
6	17,5	до 16

Полученные данные показывают, что наилучшая равномерность достигается при скоростях 2–4 км/ч. Дальнейшее увеличение скорости приводит к росту коэффициента вариации и ухудшению качества технологического процесса.

На основе разработанной модели был проведён численный эксперимент для оценки влияния частоты вращения и скорости движения на дозу внесения. Расчёт проводился для значения коэффициента $k = 0,667$, определённого для гранулированных удобрений и разработанной конструкции агрегата. Данные устанавливаем в математическую модель (рисунок 3).

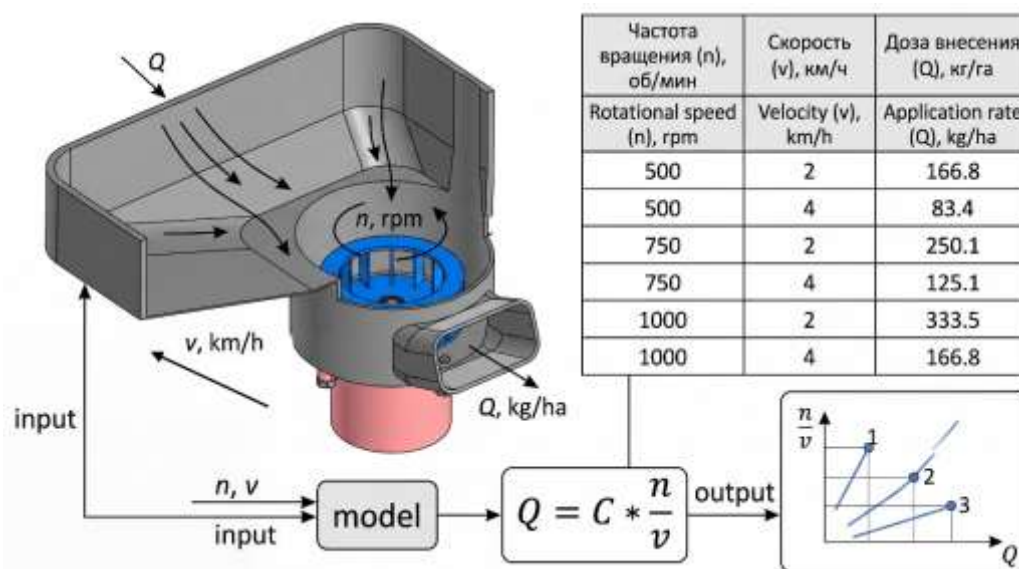


Рисунок 3. Математическая модель расчётной дозы внесения сухих минеральных удобрений при различных оборотах вращения ротора

Результаты были сведены в таблицу 2.

Таблица 2. Расчётная доза внесения при различных оборотах вращения ротора

Частота вращения n, об/мин	Скорость v, км/ч	Доза внесения Q, кг/га
500	2	166,8
500	4	83,4
750	2	250,1
750	4	125,1
1000	2	333,5
1000	4	166,8

Анализ таблицы 2 показывает, что диапазон регулирования дозы очень широк. Для обеспечения наиболее распространённой дозы 100–150 кг/га оптимальными являются режимы: $n = 500$ об/мин при $v = 2–3$ км/ч или $n = 750$ об/мин при $v = 4–5$ км/ч.

Сопоставление расчётных данных по дозе с результатами полевых испытаний показало их высокую сходимость (отклонение не превышает 8–10 %), что подтверждает адекватность математической модели.

Заключение. В результате проведённых теоретических и экспериментальных исследований разработана математическая модель процесса распределения удобрений, учитывающая скорость движения агрегата и частоту вращения рабочего органа.

1. Получено аналитическое решение дифференциального уравнения относительного движения частицы по лопатке центробежного диска, позволяющее рассчитать её скорость и координату в любой момент времени, что служит основой для определения ширины захвата.

2. Установлена функциональная зависимость дозы внесения Q от частоты вращения n и скорости движения v , имеющая вид $Q = k \cdot n/v$. На основе этой зависимости предложен алгоритм управления для поддержания заданной нормы внесения.

3. Выявлено, что с увеличением скорости движения коэффициент вариации распределения возрастает. Диапазон скоростей 2–4 км/ч признан оптимальным, обеспечивающим равномерность распределения на уровне 85–88 %.

4. Адекватность модели подтверждена сравнением расчётных и экспериментальных данных, что позволяет рекомендовать её для использования при проектировании систем автоматического управления технологическими процессами внесения удобрений на малогабаритной технике.

Список источников

1. Внутрипочвенное внесение жидких органических удобрений и оценка их доз / А. И. Панов [и др.] // Агроинженерия. 2023. Т. 25, № 2. С. 28–33.
2. Сидоров О. О., Шабалин Р. А. Технические средства для внесения жидких удобрений в почву малогабаритной техникой // Актуальные вопросы совершенствования технологии производства и переработки продукции сельского хозяйства. Йошкар-Ола : МарГУ, 2025. С. 810–813.
3. Андреев К. П. Исследование траектории полета частиц минеральных удобрений при работе центробежных разбрасывателей // Новая наука: Теоретический и практический взгляд. 2016. № 117-2. С. 105–108.
4. Исследования движения частицы удобрений по лопасти ворошителя / А. В. Шемякин, К. П. Андреев, М. Ю. Костенко [и др.] // Вестник Рязанского государственного агротехнологического университета им. П.А. Костычева. 2016. № 4 (32). С. 65–68.
5. Совершенствование центробежных разбрасывателей для поверхностного внесения минеральных удобрений / К. П. Андреев, В. А. Макаров, А. В. Шемякин, М. Ю. Костенко // Вестник РГАТУ им. П.А. Костычева. 2017. № 1 (33). С. 54–59.
6. Сергеев Ю. А., Зими́на О. Г. Обоснование технологии послойного посева семян зерновых культур и внесение удобрений // Сборник научных трудов. Серия: Технология и технические средства в АПК. Улан-Удэ : ВСГУТУ, 2018. Вып. 14. С. 47–52.

References

1. Panov AI, et al. Intrasoil application of liquid organic fertilizers and assessment of their doses. Agroiinzheneriya. 2023;25(2):28–33. (In Russ.).
2. Sidorov OO, Shabalin RA. Tekhnicheskiye sredstva dlya vneseniya zhidkikh udobreniy v pochvu malogabaritnoy tekhnikoy = Technical means for applying liquid fertilizers to the soil using small-sized equipment. In: Aktual'nyye voprosy sovershenstvovaniya tekhnologii proizvodstva i pererabotki produktsii sel'skogo khozyaystva = Current issues in improving the technology of agricultural production and processing. Yoshkar-Ola: Mari State University; 2025. P. 810–813. (In Russ.).
3. Andreev KP. Study of the flight trajectory of mineral fertilizer particles during the centrifugal spreaders operation. Novaya nauka: Teoreticheskiy i prakticheskiy vzglyad. Sterlitamak. 2016;(117-2):105–108. (In Russ.).
4. Shemyakin AV, Andreev KP, Kostenko MYu, et al. Studies of the fertilizer particles movement along the agitator blade. Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo agrotekhnologicheskogo universiteta im. P.A. Kostycheva. 2016;(4):65–68. (In Russ.).
5. Andreev KP, Makarov VA, Shemyakin AV, Kostenko MYu. Improvement of centrifugal spreaders for surface application of mineral fertilizers. Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo agrotekhnologicheskogo universiteta im. P.A. Kostycheva. 2017;(1):54–59. (In Russ.).

6. Sergeev YuA, Zimina OG. Obosnovaniye tekhnologii posloynogo poseva semyan zernovykh kul'tur i vneseniye udobreniy = Justification of the technology of layer-by-layer sowing of grain crop seeds and fertilization. In: Sbornik nauchnykh trudov seriya: Tekhnologiya i tekhnicheskiye sredstva v APK = Collection of scientific papers, series: Technology and technical means in the agro-industrial complex. Issue 14. Ulan-Ude: VSGUTU; 2018. P. 47–52. (In Russ.).

Информация об авторах

Сидоров Олег Олегович, аспирант кафедры агроинженерии и технологии производства, переработки сельскохозяйственной продукции, ФГБОУ ВО «Марийский государственный университет», ул. Машиностроителей, д. 15, г. Йошкар-Ола, Республика Марий Эл, Российская Федерация, 424020

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-9829-4368>

e-mail: oleg.sidorov23@yandex.ru

Юнусов Губейдулла Сибятуллович, доктор технических наук, профессор кафедры агроинженерии и технологии производства, переработки сельскохозяйственной продукции, ФГБОУ ВО «Марийский государственный университет», ул. Машиностроителей, д. 15, г. Йошкар-Ола, Республика Марий Эл, Российская Федерация, 424020

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2127-6439>

e-mail: 270144@mail.ru

Information about the authors

Sidorov Oleg Olegovich, postgraduate student at the department of Agroengineering and Technology of Production and Processing of Agricultural Products, Mari State University, 15 Mashinostroiteley Street, Yoshkar-Ola, Republic of Mari El, 424020, the Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-9829-4368>

e-mail: oleg.sidorov23@yandex.ru

Yunusov Gubeidulla Sibyatulloovich, doctor of technical sciences, professor at the department of Agroengineering and Technology of Production and Processing of Agricultural Products, Mari State University, 15, Mashinostroiteley Street, Yoshkar-Ola, Republic of Mari El, 424020, the Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2127-6439>

e-mail: 270144@mail.ru

Конфликт интересов: авторы заявили об отсутствии конфликта интересов

Conflict of interest: the authors declared that there was no conflict of interest

Статья / The article

поступила в редакцию / was received

07.08.2026

одобрена после рецензирования / approved after reviewing

18.08.2026

принята к публикации / accepted for publication

28.08.2026